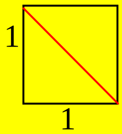
Reelle Zahlen

Quadratwurzel

Für $a \geq 0$ ist die **Quadratwurzel** $\sqrt{a}$ diejenige nicht-negative Zahl, deren Quadrat a ergibt: Also $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Beachte:
- Der Radikand a darf nicht negativ sein
- $\sqrt{a^2} = |a|$ für $a \in$ IR



Die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat beträgt $\sqrt{2}$

$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, denn $1{,}2^2 = 1{,}44$

$\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$

$\sqrt{-6}$ nicht definiert

$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = |-6|$

$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$

Rechenregeln

Für a, b ≥ 0 gilt:

(1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ Produktregel

(2) $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ Quotientenregel

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$

$\sqrt{81} : \sqrt{3} = \sqrt{81 : 3} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

Achtung: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \neq \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Rationalmachen des Nenners

Damit ist das geschickte Erweitern des Nenners eines Bruchterms in der Weise gemeint, dass keine Wurzeln mehr auftreten.

$$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3}{7}\sqrt{7}$$

$$\frac{3}{\sqrt{7}+1} = \frac{3(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)} = \frac{3(\sqrt{7}-1)}{7-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{7}-1)$$

Reelle Zahlen ú

Die **Menge der reellen Zahlen** setzt sich zusammen aus der
Menge der rationalen Zahlen
(Bruchzahlen; endliche oder unendlich periodische Dezimalbrüche)
und der
Menge der irrationalen Zahlen
(nicht endliche und nicht periodische Dezimalzahlen)

$\frac{2}{9}$; -7; $\sqrt{9}$; $-\frac{3}{8}$; $1{,}46\overline{2}$ rational

$\sqrt{7}$; $3+\sqrt{2}$; 1,010010001…… irrational

Reelle Zahlen – Teil 2

n-te Wurzel

Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt, also

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$\sqrt[3]{125} = 5$, denn $5^3 = 125$

$\sqrt[3]{-125}$ existiert nicht!

Statt $\sqrt[n]{a}$ schreibt man auch $a^{\frac{1}{n}}$, a hat also in diesem Fall einen rationalen Exponenten.

$$\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}}$$

Weiter gilt:

- $a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

$$125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[6]{0{,}09^3} = 0{,}09^{\frac{3}{6}} = 0{,}09^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$$

Rechenregeln:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(2) $a^x : a^y = a^{x-y}$

(3) $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$

(4) $a^x \cdot b^x = \left(a \cdot b\right)^x$

(5) $a^x : b^x = \left(a : b\right)^x$

(1) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

(2) $3^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}$

(3) $\left(3^4\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{4 \cdot \frac{1}{2}} = 3^2 = 9$

(4) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = (3 \cdot 7)^{\frac{1}{2}} = 21^{\frac{1}{2}} = \sqrt{21}$

(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{6}\right)^3 = 2^3 = 8$

Rationalmachen des Nenners

Wie bei Quadratwurzeln auch muss der Nenner so erweitert werden, dass dieser keine Wurzeln mehr enthält

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{3}}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{7} = \frac{1}{7} \cdot 7^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{7} \cdot \sqrt[3]{49}$$