9.2 Quadratische Gleichungen

9.2.1 a) $\dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{1}{8} = 0$

Lösungsformel: $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}}{1} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$L = \left\{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3};\ 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$$

b) $L = \{\}$ (Diskriminante $D = b^2 - 4ac = \dfrac{1}{4} - 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{4}$, also $D < 0$)

c) $L = \left\{\dfrac{7}{2};\ \dfrac{1}{2}\right\}$

d) $x^2 = 4x$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-4) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \vee x = 4$

$L = \{0;\ 4\}$

e) $x^2 - 225 = 0$

$x^2 = 225$

$x = \pm 15$

$L = \{-15;\ 15\}$

9.2.2 a) $T(x) = (x-6) \cdot (x+1)$

b) $T(x) = (x+5)x$

c) $T(x) = 3(x-1)(x+2)$

9.2.3 a) $2x^4 - 11x^2 = -15$

Substitution: $z{:=}x^2$

Lösungen der Gleichung $2z^2 - 11z + 15 = 0$:

$z_1 = \frac{5}{2}$; $z_2 = 3$

Resubstitution liefert: $x^2 = \frac{5}{2}$ bzw. $x^2 = 3$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} = \pm\sqrt{\frac{10}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10}$ bzw. $x = \pm\sqrt{3}$

Lösungsmenge der Ausgangsgleichung: $L = \left\{-\frac{\sqrt{10}}{2};\ \frac{\sqrt{10}}{2};\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right\}$

b) $\sqrt{x+1} - x = -1$, Definitionsmenge $\mathbb{D} = \{x | x \geqq -1\}$

Gleichung quadrieren:

$x + 1 = (x-1)^2$

$x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 3x = 0$

Lösungen der quadrierten Gleichung: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

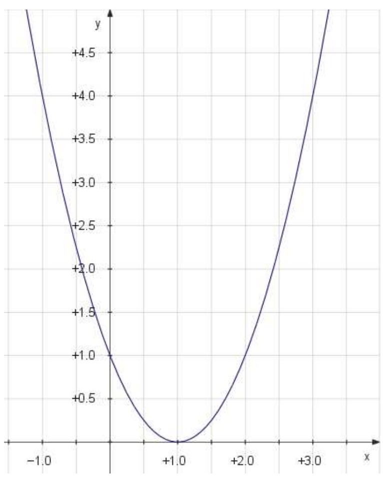
Probe nicht vergessen! (Quadrieren einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung!)

Die Lösung $x_1 = 0$ der quadrierten Gleichung ist keine Lösung der Wurzelgleichung, also: $L = \{3\}$

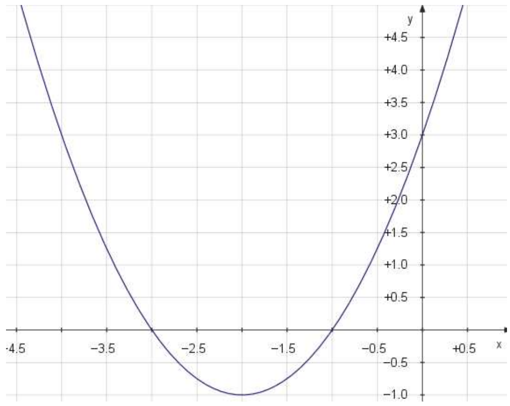
9.2.4

a) $f(x) = (x-1)^2$

- bei $x = 1$ doppelte Nullstelle bzw. Scheitel der Parabel
- nach oben geöffnet
- Öffnung einer Normalparabel
- $W = [0; \infty[$

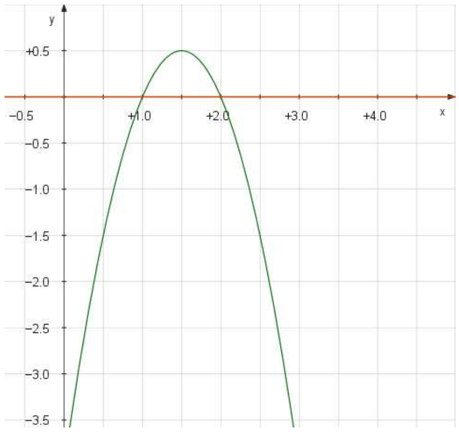


b) $f(x) = (x+2)^2 - 1$



- Scheitelkoordinaten: $S(-2|-1)$
- nach oben geöffnet
- Öffnung einer Normalparabel
- $\Rightarrow$Nullstellen bei $x = -3$ und $x = -1$
- $W = [-1; \infty[$

c) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4 = -2(x^2 - 3x + 2)$



- Bestimmung der Scheitelform:

  $$f(x) = -2\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\right)$$

  $$f(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

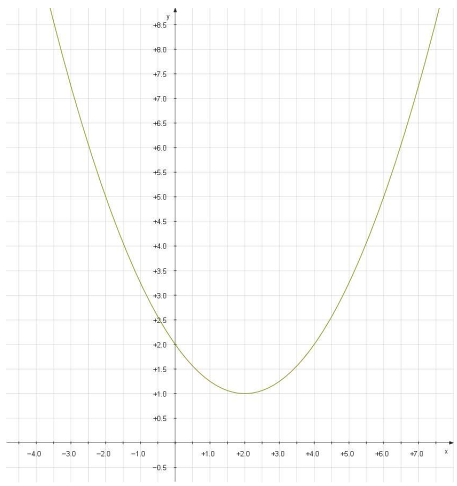
  Scheitelkoordinaten: $S\left(\frac{3}{2}|\frac{1}{2}\right)$
- nach unten geöffnet
- Öffnung enger als bei einer Normalparabel
- $W =]-\infty; 0,5]$
- Nullstellen:

  $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

  $$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

  $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$



- Scheitelkoordinaten: $S(2|1)$
- nach oben geöffnet
- Öffnung weiter als bei einer Normalparabel
- keine Nullstellen
- $W = [1; \infty[$