8.2 Lösen von Bruchgleichungen und Bruchungleichungen

8.2.1 Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Bruchgleichungen!

Vorgehensweise (Bruchgleichungen lösen)

1) Definitionsmenge bestimmen.
2) Mit Hauptnenner durchmultiplizieren.
3) Gleichung lösen.
4) Lösungsmenge angeben (dabei Definitionsmenge beachten).

a) $\frac{x}{2x+3} = \frac{x-3}{2x-1}$; $D = IR \setminus \{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\}$

$$\frac{x}{2x+3} = \frac{x-3}{2x-1} \quad | \cdot (2x+3)(2x-1)$$

$$x \cdot (2x-1) = (x-3) \cdot (2x+3)$$

$$2x^2 - x = 2x^2 + 3x - 6x - 9$$

$$2x = -9$$

$$x = -\frac{9}{2} \qquad L = \{-\frac{9}{2}\}$$

b) $\frac{3x}{3x+2} - \frac{2-3x}{9x^2+12x+4} = 1$

$L = \{-2\}$ Beachte: $D = IR \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ und $HN = (3x+2)^2$

c) $2 - \frac{2}{x} - \frac{4x}{2x+1} = 0$

$L = \{-1\}$ Beachte: $D = IR \setminus \{0; -\frac{1}{2}\}$ und $HN = x(2x+1)$

d) $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ $x \neq 0$; ebenso $a \neq 0; b \neq 0$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad | \cdot xab$$

$$ab = xa + xb$$

$$ab = x(a + b) \quad | : (a+b) \neq 0$$

$$x = \frac{ab}{a + b} \; ; \quad \text{falls } (a+b) \neq 0$$

8.2.2 Bestimme Definitions- und Lösungsmenge folgender Bruchungleichungen

Beachte: Eine Ungleichung darf man nicht einfach mit einem Faktor durch multiplizieren, da man das Vorzeichen des Faktors beachten muss!
Deshalb macht man eine Fallunterscheidung nach den Vorzeichen des Zählers und des Nenners. Dies kann auch mit einer Vorzeichentabelle geschehen

a) $\frac{8}{3x+12} \leq 0 \quad D = IR \setminus \{-4\}$

Grundüberlegung: Da der Zähler 8 größer als Null ist („positives Vorzeichen"), muss der Nenner kleiner als Null („negatives Vorzeichen") sein, damit der Bruch kleiner/gleich Null wird.

Also:
$$3x + 12 < 0$$
$$3x < -12$$
$$x < -4$$
$$L = \{ x \mid x < -4 \} =]-\infty ; -4[$$

b) $\frac{2x+3}{3x-5} \geq 0 \quad ; \quad x \neq \frac{5}{3}$

Grundüberlegung: Da der Bruch größer/gleich Null sein soll, gibt es zwei Möglichkeiten (Fälle) !!

1.Fall $2x+3 \geq 0$ und $3x-5 > 0$
$$x \geq -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad x > \frac{5}{3}$$
$$L_1 = \{ x \mid x > \frac{5}{3} \} =]\frac{5}{3} ; \infty[$$

2.Fall $2x+3 \leq 0$ und $3x-5 < 0$
$$x \leq -\frac{3}{2} \quad \text{und} \quad x < \frac{5}{3}$$
$$L_2 = \{ x \mid x \leq -\frac{3}{2} \} =]-\infty : -\frac{3}{2}]$$

Insgesamt: $L = L_1 \cup L_2 =]-\infty ; -\frac{3}{2}] \cup]\frac{5}{3} ; \infty[= IR \setminus]-\frac{3}{2} ; \frac{5}{3}]$

c) $\frac{2x+3}{3x-5} > 4 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{3x-5} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{-10x+23}{3x-5} > 0 \quad x \neq \frac{5}{3}$

Vorzeichentabelle:

Bereich		$\frac{5}{3}$	$\frac{23}{10}$
-10x+23 3x-5	+ -	+ +	- +
$\frac{-10x+23}{3x-5}$	-	+	-

$\Rightarrow L =]\frac{5}{3} ; \frac{23}{10}[$