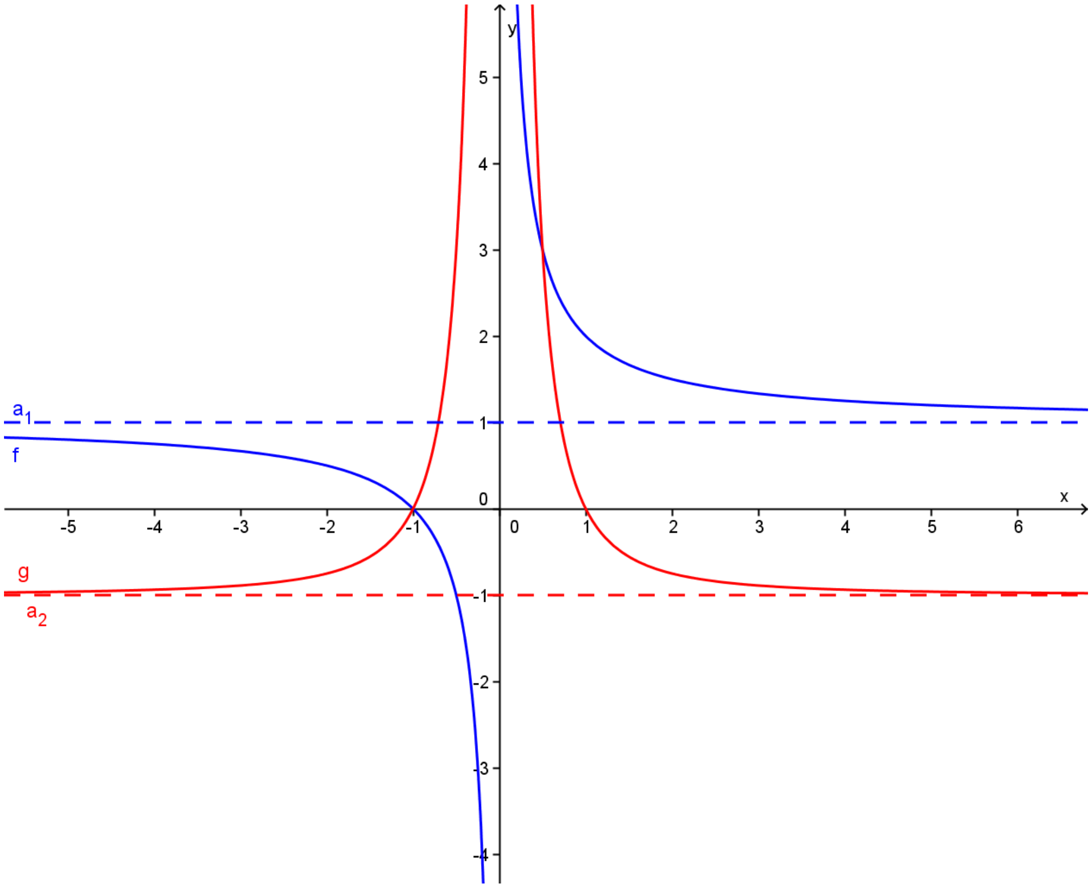
Lösungen

10.4 Funktionsuntersuchungen:

1. Lösung: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{x^{-1}}_{\to 0}+1\right)=1 \Longrightarrow$ waagrechte Asymptote von f: a_1: y = 1;

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{x^{-2}}_{\to 0}-1\right)=-1 \Longrightarrow$ waagrechte Asymptote von g: a_2: y = – 1;

außerdem senkrechte Asymptote von f und g (bei der Definitionslücke) x = 0.(y-Achse)



2. Lösung: a) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)=2 \Longrightarrow$ waagrechte Asymptote y = 2

b) Klammere im Zähler und Nenner die höchste x-Potenz des Nenners aus und kürze!

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x^3-6x+9}{x^3+5x^2-4x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5-\overbrace{\frac{6}{x^2}+\frac{9}{x^3}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}_{\to 0}}\right)=5$$

$\Longrightarrow$ waagrechte Asymptote y = 5

c) Klammere im Zähler und Nenner die höchste x-Potenz des Nenners aus und kürze!

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^4-8x^3+2}{4x^3+3x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\overbrace{\overbrace{4x}^{\to\pm\infty}-8+\overbrace{\frac{2}{x^3}}^{\to 0}}^{\to\pm\infty}}{\underbrace{4+\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}}_{\to 4}}\right)=\pm\infty$$

d) Klammere im Zähler und Nenner die höchste x-Potenz des Nenners aus und kürze!

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-2}{4x^2+3x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\overbrace{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}^{\to 0}}{\underbrace{4+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}}_{\to 4}}\right)=0 \Longrightarrow$ die x-Achse ist waagr.

Asymptote

e) Klammere die höchste x-Potenz aus!

$$\lim_{x\to\pm\infty}(4x^4-4x^2+1)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{x^4}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{(4-\underbrace{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}}_{\to 0})}_{\to 4}\right)=+\infty$$

f) Klammere die höchste x-Potenz aus!

$$\lim_{x\to\pm\infty}(-x^3+7x^2-4)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{x^3}_{\to\pm\infty}\cdot\underbrace{(-1+\underbrace{\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}}_{\to 0})}_{\to -1}\right)=\mp\infty$$

g) $\lim_{x \to +\infty}(0{,}125^x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{\underbrace{8^x}_{\to +\infty}}\right) = 0 \implies$

die x-Achse ist waagr. Asymptote für $x \to +\infty$;

$$\lim_{x \to -\infty}(0{,}125^x) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{\underbrace{8^x}_{\to 0^+}}\right) = +\infty;$$

h) f(x) schwankt zwischen –3 und 3, deshalb ist f weder konvergent noch divergiert für $x \to \pm\infty$.

3. Lösung: a) $f(-x) = (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 + 4 = x^4 - 2x^2 + 4 = f(x)$

$\implies G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

b) $f(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1 \neq \pm f(x) \implies$ keine Symmetrie bzgl. des KOSY

c) $f(-x) = -x \cdot ((-x)^2 - 1) = -x \cdot (x^2 - 1) = -f(x)$

$\implies G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

d) $f(-x) = x^2 \cdot \sin(-2x) = -x^2 \cdot \sin(2x) = -f(x)$

$\implies G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

e) $f(-x) = 3^{-x} \neq \pm f(x) \implies$ keine Symmetrie bzgl. des KOSY

f) $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2-1} = \frac{1}{x^2-1} = f(x) \implies G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

4. Lösung: a) Der Graph der Funktion f entsteht aus dem Graph der Funktion g, in dem man den Graph der Funktion f um a nach links und um b nach oben verschiebt.

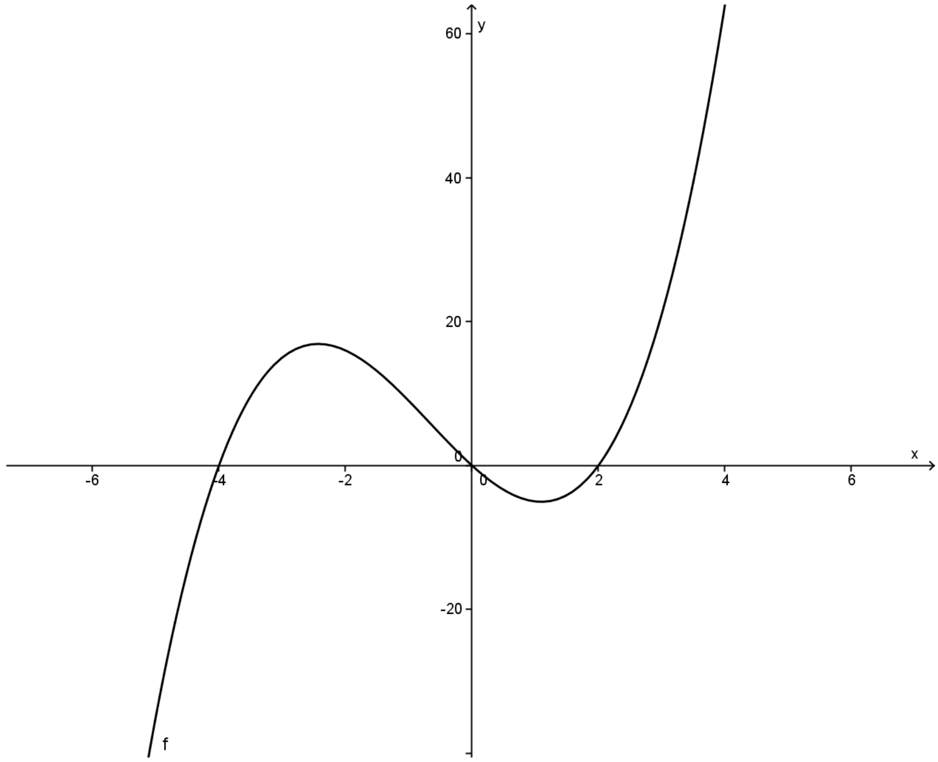
b) Der Graph der Funktion f entsteht aus dem Graph der Funktion g, durch Spiegelung an der x-Achse.

c) Der Graph der Funktion f entsteht aus dem Graph der Funktion g, durch Spiegelung an der y-Achse.

5. Lösung: a) $x^3 + 2x^2 - 8x = x\,(x - 2)(x + 4)$

$\Longrightarrow$ einfache Nullstellen $x_0 = 0$; $x_1 = 2$ und $x_2 = -4$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^3) = \pm\infty$



b) Der Graph von g entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um 2 nach links

$\Longrightarrow$ einfache Nullstellen von g: $x_{0g} = -2$; $x_{1g} = 0$ und $x_{2g} = -6$.

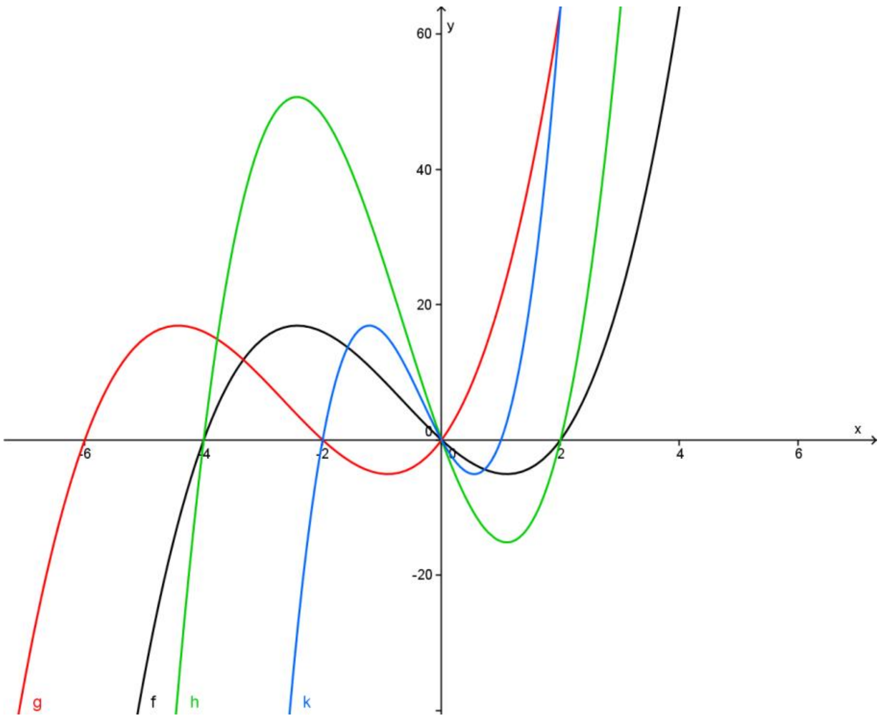
Der Graph von h entsteht durch Streckung des Graphen von f um 3 entlang der y-Achse

$\Longrightarrow$ h hat die gleichen Nullstellen wie f.

Der Graph von k entsteht durch Stauchung des Graphen von f um 0,5 entlang der x-Achse

$\Longrightarrow$ einfache Nullstellen von k: $x_{0k} = 0$; $x_{1k} = 1$ und $x_{2k} = -2$.

c)



6. Lösung: roter Graph: $y = 0{,}5 \cdot 0{,}5^x = 0{,}5^{x+1}$

[Stauchung von G_f um 0,5 entlang der y-Achse];

grüner Graph: $y = (-1) \cdot (0{,}5^x - 1) = (-1) \cdot 0{,}5^x + 1$

[Verschiebung von G_f um 1 nach unten und Spiegelung an der x-Achse];