Lösungen

10.3 Ganzrationale Funktionen:

1. Lösung: $A(1/-1) \Longrightarrow -1 = c \cdot 1^n + a \Longrightarrow -1 = c + a$ (1)

$B(0/-4) \Longrightarrow -4 = c \cdot 0^n + a \Longrightarrow \mathbf{-4 = a}$ (2)

$C(3/77) \Longrightarrow 77 = c \cdot 3^n + a$ (3)

(2) in (1): $\mathbf{c = 3}$

a, c in (3): $77 = 3 \cdot 3^n - 4 \Longrightarrow \mathbf{n = 3}$

$\Longrightarrow f(x) = 3\,x^3 - 4$

2. Lösung: a) Dividend nach aufsteigender x-Potenz ordnen!

$$
\begin{array}{l}
(+2x^3 - 3x^2 - 14x + 15) : (x - 3) = 2x^2 + 3x - 5 \\
-(+2x^3 - 6x^2) \\
\hline
\qquad + 3x^2 - 14x \\
\quad -(+3x^2 - 9x) \\
\hline
\qquad\qquad - 5x + 15 \\
\qquad\quad -(-5x + 15) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

b) $(x^3 + 0x^2 - 3x - 2) : (x^2 + 2x + 1) = x - 2$

c) $(x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 3x + 18) : (x^2 + 2x - 3) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$

d) $(3x^2 - 4x + 2) : (x - 1) = 3x - 1 + \frac{1}{x-1}$

(Hinweis: Bei der Polynomdivision ergibt sich als Rest 1; dieser muss noch durch $(x - 1)$ dividiert werden, deshalb ergibt sich im Ergebnis als letzter Summand ein Bruch!)

3. Lösung: a) $7x^2 + 11x - 6 = 0$

mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt sich

$x_1 = -2$ und $x_2 = \frac{3}{7}$;

$\Rightarrow f(x) = 7x^2 + 11x - 6 = 7(x - (-2))\left(x - \frac{3}{7}\right) = 7(x + 2)\left(x - \frac{3}{7}\right)$

$\Rightarrow x_1 = -2$ und $x_2 = \frac{3}{7}$ sind jeweils einfache Nullstellen.

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x\,(x^2 - x - 2) = x\,(x + 1)\,(x - 2)$

$\Longrightarrow x_0 = 0;\ x_1 = -1;\ x_2 = 2$; jeweils einfache Nullstellen.

c) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

Substituiere $u = x^2$ und löse die Gleichung $4u^2 - 37u + 9 = 0$ mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen, so erhält man $u_1 = 9;\ u_2 = 0{,}25$;

Rücksubstitution ergibt: $x_{11} = -3;\ x_{12} = 3;\ x_{21} = -0{,}5;\ x_{22} = 0{,}5$;

$\Rightarrow f(x) = 4x^4 - 37x^2 + 9 = 4(x+3)(x-3)(x+0{,}5)(x-0{,}5)$

$\Rightarrow x_{11} = -3;\ x_{12} = 3;\ x_{21} = -0{,}5;\ x_{22} = 0{,}5$ sind jeweils einfache Nullstellen.

d) $x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0$

Nullstelle z.B. $x = -1$(Teiler des konstanten Glieds -4) raten; führe dann die Polynomdivision $(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) : (x + 1)$ durch und zerlege das Ergebnis $(x^2 - 3x - 4)$ in Linearfaktoren (z.B. mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen):

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = (x^2 - 3x - 4)(x+1) = (x-4)(x+1)^2$

$\Rightarrow x_1 = -1$ ist eine doppelte und $x_2 = 4$ ist eine einfache Nullstelle

4. Lösung: a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x\left(x^2 - 4x + 4\right) = x(x-2)^2$

$\Rightarrow$ einfach Nullstelle bei $x_1 = 0$ und doppelte Nullstelle bei $x_2 = 2$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^3 - 4x^2 + 4x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{x^3}_{\to\pm\infty}\ \underbrace{(1 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0})}_{\to 1}\right) = \pm\infty$$

Oder: Satz: Das Verhalten eines Polynoms wird vom Term mit dem höchsten Exponenten bei x bestimmt.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(x^3) = \pm\infty$$

b) $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x+1)(x^2+1)$

[vgl. Lösungsweg der Aufgabe 17d]

einfach Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(x^4) = +\infty$$

c) $h(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{4}x^2 - 1 = -\frac{1}{4}(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

[vgl. Lösungsweg der Aufgabe 17c]

einfach Nullstellen bei $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$ und $x_4 = 2$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{4}x^4\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{4}\underbrace{x^4}_{\to+\infty}}_{\to-\infty}\right) = -\infty$$