Lösungen

10.2 Exponentialfunktionen und Logarithmus:

1. Lösung: a) $V: t \mapsto b \cdot a^t$ mit V: Volumen des Bierschaums in ml; t: Zeit in s

$(40\text{ s} \mid 66\text{ ml}) \Rightarrow 66 = b \cdot a^{40} \Rightarrow b = \frac{66}{a^{40}}$ (1)

$(80\text{ s} \mid 52\text{ ml}) \Rightarrow 52 = b \cdot a^{80}$ (2)

(1) in (2): $52 = \frac{66}{a^{40}} \cdot a^{80} \Longleftrightarrow a^{40} = \frac{26}{33} \Longrightarrow a = \sqrt[40]{\frac{26}{33}} \approx 0{,}994$

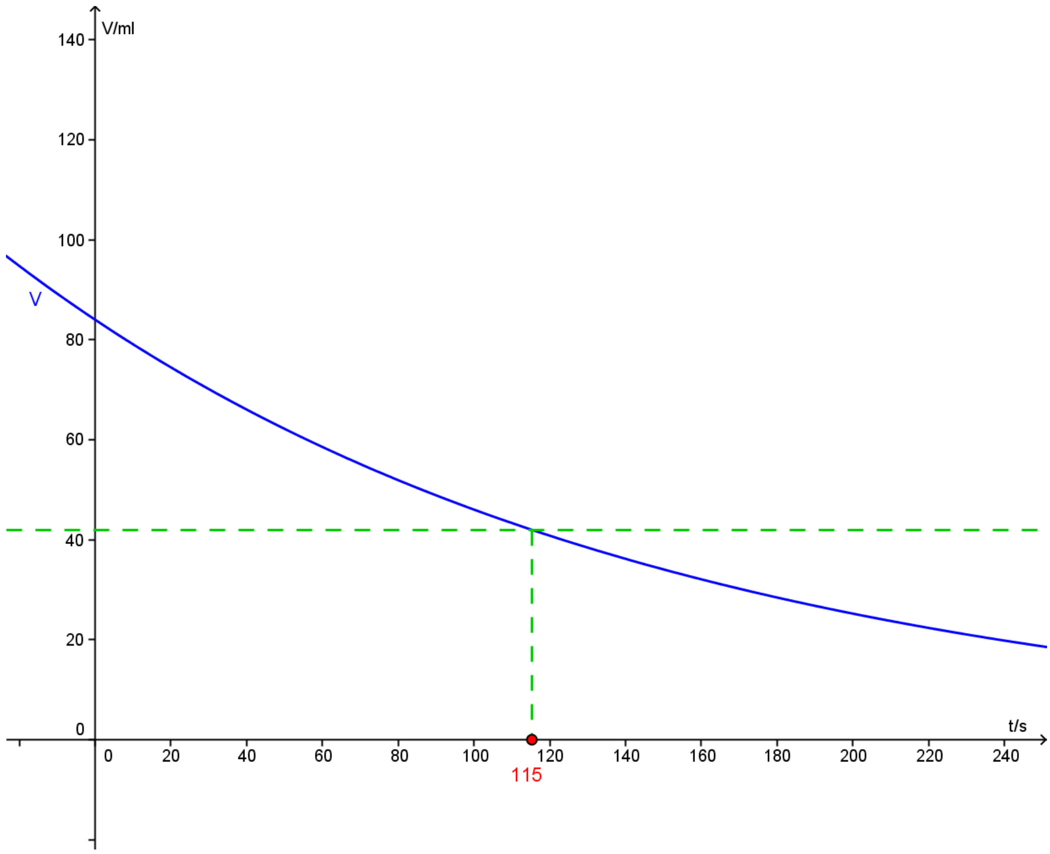
a in (1): $b \approx 84$

somit lautet das Zerfallsgesetz: $V: t \mapsto 84 \cdot 0{,}994^t$

$V(120) = 41$;

b) $V(100) = 46$; $V(200) = 25$;

c) $T_H = 115$



2. Lösung: Das Kapital in € nach t Jahren ist $K(t) = 25000 \cdot 1{,}05^t$;

somit $K(5) = 31907{,}04$

3. Lösung: $y = b \cdot a^x$ (Hinweis: Die Basis a muss immer positiv und ungleich 1 sein!)

$P(-2/12) \Leftrightarrow 12 = b \cdot a^{-2}$ (1)

$Q(2/0{,}75) \Leftrightarrow 0{,}75 = b \cdot a^2$ (2)

Durch Lösen dieses Gleichungssystems analog zu Aufgabe 8 ergibt sich

$y = 3 \cdot 0{,}5^x$

4. Lösung: a) $2 \cdot \lg \frac{1}{a} + \lg a^2 = \lg \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \lg a^2 = \lg \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot a^2\right] = \lg 1 = 0$

anderer Lösungsweg: $-2 \cdot \lg a + 2 \lg a = 0$

b) $\frac{2}{3} \lg x$; (Hinweis: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$)

c) $2 \lg x$; (Hinweis: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$)

5. Lösung: a) Bestimmung der Definitionsmenge: $3x - 1 > 0 \Longrightarrow D =]\frac{1}{3}; +\infty[$;

Bestimmung der Lösungsmenge: $\log_2(3x - 1) = 5 \Longrightarrow 3x - 1 = 2^5 = 32$

$\Longrightarrow x = 11 \Longrightarrow L = \{11\}$

b) $D =]1; +\infty[$;

$\lg (x^3 - 1) = -1 \Longrightarrow x^3 - 1 = 10^{-1} = 0{,}1 \Longrightarrow L = \{\sqrt[3]{1{,}1}\}$

c) $4x + 1 > 0$ und gleichzeitig $x - 1 > 0 \Longrightarrow D =]1; +\infty[$;

$\log_2(4x + 1) = \log_2 2 - \log_2 (x - 1) = \log_2[2 : (x - 1)]$ (Hinweis: $\log_2 2 = 1$)

$\Longrightarrow 4x + 1 = \frac{2}{x-1} \Longrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 2 \Longrightarrow 4x^2 - 3x - 3 = 0$

Aufgrund der Lösungsformel für quadratisch Gleichungen unter

Berücksichtigung der Definitionsmenge ($x = \frac{3-\sqrt{57}}{8}$ liegt nicht in der

Definitonsmenge) ergibt sich $L = \left\{\frac{3+\sqrt{57}}{8}\right\}$.

6. Lösung: a) $x = 4$; da $3^x = 81 = 3^4$ b) $x = -5$; da $0{,}5^{-5} = 2^5 = 32 = 0{,}5^x$

c) $x = -3$; da $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ d) $x = -2$, da $64 = 2^6 = 0{,}5^{-6}$

e) $1{,}5^x = \frac{7}{15} \Rightarrow x = \log_{1{,}5} \frac{7}{15} \approx -1{,}8797$ (TR)

f) $5^{2x} = 4^{1-x} \Longrightarrow \lg(5^{2x}) = \lg(4^{1-x}) \Longrightarrow 2x \lg 5 = (1 - x) \lg 4 \Longrightarrow x\,(2 \lg 5 + \lg 4) = \lg 4$

$\Longrightarrow x \approx 0{,}3010$ (TR)

g) $2^4 \cdot 2^{3x+8} \cdot 2^{4x+2} = 1 \Longrightarrow 2^{4+3x+8+4x+2} = 2^0 \Longrightarrow x = -2$

h) $2^{6x-3} - 2^{6x-2} + 2^{6x-1} = 3 \Longrightarrow 2^{6x} \cdot 2^{-3} - 2^{6x} \cdot 2^{-2} + 2^{6x} \cdot 2^{-1} = 3$

$\Longrightarrow 2^{6x} \cdot \frac{3}{8} = 3 \Longrightarrow 2^{6x} = 8 = 2^3 \Longrightarrow x = 0{,}5$

(Hinweis: $8 = 2^3$; $4 = 2^2$)

7. Lösung: a) Subst.: $u = 3^x \Longrightarrow u^2 - 6u - 27 = 0$;

aufgrund der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

ergibt sich $u_1 = 9$ und $u_2 = -3$

Rücksubst.: $9 = 3^x \Longrightarrow x = 2$;

$-3 = 3^x$ Widerspruch, da $3^x > 0$

$\Longrightarrow L = \{2\}$

b) Subst.: $u = 5^{x+1} \Longrightarrow u^2 - 4u + 3 = 0$;

aufgrund der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

ergibt sich $u_1 = 3$ und $u_2 = 1$

Rücksubst.: $3 = 5^{x+1} \Longrightarrow x_1 = \log_5 3 - 1$;

$1 = 5^{x+1} \Longrightarrow x_2 = -1$

$\Longrightarrow L = \{\log_5 3 - 1 ; -1\}$

c) $2^x + 2^2 \cdot 2^{-x} = 8{,}5$

Subst.: $u = 2^x \Longrightarrow u + 4 \cdot u^{-1} = 8{,}5 \Longrightarrow u^2 + 4 = 8{,}5\,u \Longrightarrow u^2 - 8{,}5\,u + 4 = 0$

aufgrund der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

ergibt sich $u_1 = 8$ und $u_2 = 1$

Rücksubst.: $8 = 2^x \Longrightarrow x_1 = 3$;

$1 = 2^x \Longrightarrow x_2 = 0$

$\Longrightarrow L = \{0; 3\}$