Ganzrationale Funktionen

Definitionen:

Eine Funktion mit dem Funktionsterm $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ heißt **Potenzfunktion** vom Grad n.

Eine Funktion mit dem Funktionsterm $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ heißt **Polynomfunktion** n-ten Grades.

Beispiel: (Polynom vom Grad 3)

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = $$
$$= \frac{1}{6}(x^3 - 4x^2 - 3x + 18)$$

Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen

- Nullstellenbestimmung

Ist a eine Nullstelle von f, so gilt:

$$f(x) = (x - a) \cdot g(x)$$

Die Zahl a heißt r-fache Nullstelle von f, wenn gilt:

$$f(x) = (x - a)^r \cdot g(x) \text{ und } r \in \mathbb{N}$$

Nullstellen bestimmt man z.B. durch Faktorisieren mit Hilfe der **Polynomdivision**

Beispiel:

Bestimme alle Nullstellen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 4x^2 - 3x + 18)$$

1. Schritt: $x_1 = -2$ (erraten) =>

2.Schritt: Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 - 3x + 18) : (x + 2) = x^2 - 6x + 9 \\
\underline{-(x^3 + 2x^2)} \\
\quad -6x^2 - 3x \\
\quad \underline{-(-6x^2 - 12x)} \\
\qquad \mathbf{9}x + 18 \\
\qquad \underline{-(9x + 18)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Insgesamt:

$$f(x) = \frac{1}{6}(x+2)(x^2-6x+9) = \frac{1}{6}(x+2)(x-3)^2$$

- Die Nullstellen sind:
- $x_1 = -2$ (einfach) und $x_2 = 3$ (doppelt)

- Symmetrie

Der Graph der Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

Der Graph der Funktion f ist symmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

- Verhalten im „Unendlichen“

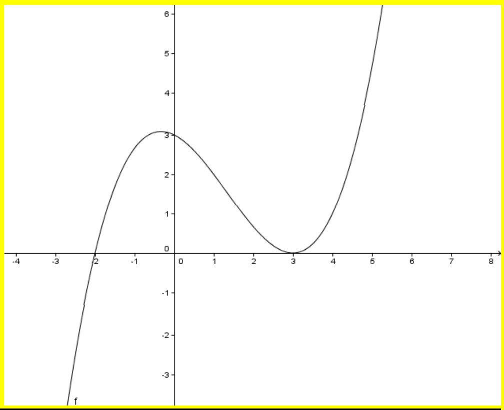
Bei einer Polynomfunktion bestimmt der Term mit dem höchsten Exponenten das Verhalten im „Unendlichen“

Beispiel:
Bei der Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$ bestimmt der Term „$\frac{1}{6}x^3$“ das Verhalten im „Unendlichem“.

Also: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- Graph

$\mathbf{f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 3} = \frac{1}{6}(x+2)(x-3)^2$



Beachten Sie:

x= -2 ist einfache Nullstelle
⇨ Graph G_f schneidet die x-Achse

x= 3 ist doppelte Nullstelle
⇨ Graph G_f berührt die x-Achse

<u>Formänderungen bei Graphen</u>

$g(x) = f(x + a)$ mit $(a>0)$

Der Graph G_g der Funktion g ist gegenüber dem Graphen G_f der Funktion f <u>um a nach links verschoben</u>.

Entsprechend gilt:

- $g(x) = f(x) + a$ mit $(a>0)$ — Verschiebung um a nach oben
- $g(x) = a\,f(x)$ mit $(a>0)$ — Streckung in y-Richtung um Faktor a
- $g(x) = f(ax)$ mit $(a>0)$ — Streckung in x-Richtung um Faktor 1/a