Exponentielles Wachstum

Begriffsbildung:

Der Zuwachs (oder die Abnahme) ist zum jeweiligen Bestand proportional (Zinseszins , Vermehrung von biolo-gischen Systemen im Anfangsstadium, Radioaktiver Zerfall, Absorption von Strahlung durch dünne Schichten ….)

Der Bestand ändert sich jeweils um den gleichen **Wachstumsfaktor a**. Der **Anfangsbestand b** hat sich nach x Einheiten x- mal ver-a-facht, also:

$$y = b \cdot a^x$$

Beispiele:

1) Ein Kapital K_0 wird mit jährlich 4 % verzinst.

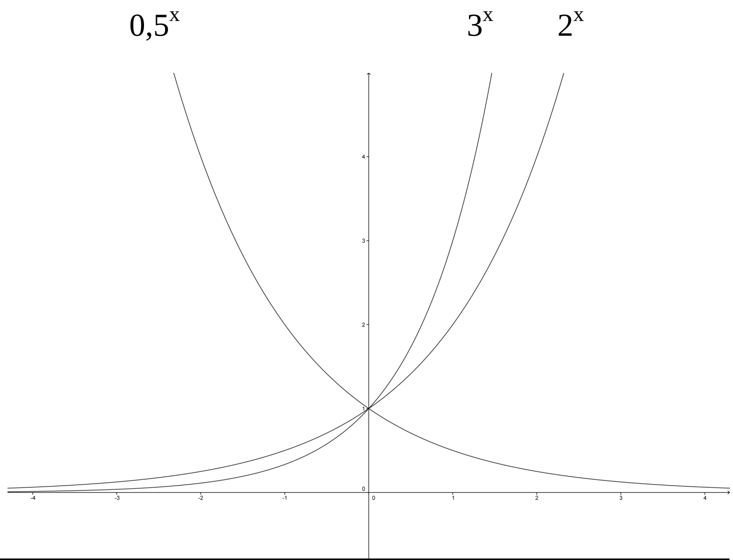
$$\rightarrow \quad K(t) = K_0 \cdot 1{,}04^{\,t}$$

2) Eine Bakterienkultur verdoppelt sich in 10 Stunden.
Gesucht ist die stündliche Zunahme.

$$2\,b = b \cdot a^{10} \quad ;$$

$$a = 2^{\frac{1}{10}} = 1{,}07177..$$

$\rightarrow$ Die stündliche Zunahme beträgt 7,177 % .



Die Exponentialfunktion:

$x \rightarrow f(x) = a^x \quad ; \quad a > 0 \,;\, a \neq 1$

Eigenschaften:

- Die Definitionsmenge ist ú , die Wertemenge ú$^+$
- Der gemeinsame Punkt aller Exponentialfunktionen ist (0 / 1)
- $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0 \quad \textit{für} \quad 0 < a < 1$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \textit{für} \quad a > 1$
  Damit ist die x- Achse Asymptote
- Spiegelt man den Graphen von a^x an der y – Achse, so erhält man den Graphen von $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$
- Für a<1 fällt der Graph (exponentielle Abnahme),
  für a>1 steigt er (exponentielle Zunahme)