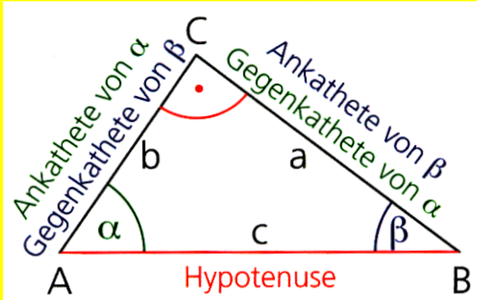
Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Gegenkathete und Ankathete

In einem rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ bezeichnet man die **Seite a** als **Gegenkathete des Winkels α** (liegt dem Winkel gegenüber) und die **Seite b** als **Ankathete des Winkels α** (liegt am Winkel).

Für den Winkel β gilt konsequenterweise genau die umgekehrte Bezeichnung der Seiten, d.h.
Seite a ist Ankathete von β und Seite b ist Gegenkathete von β.



Sinus, Kosinus und Tangens

Da in allen ähnlichen (rechtwinkligen) Dreiecken gleichliegende Winkel gleichgroß sind und die Seitenverhältnisse konstant, können nun für rechtwinklige Dreiecke folgende Beziehungen zwischen Winkel und Seitenverhältnis vereinbart werden.

Als **Sinus von α** bezeichnet man das Verhältnis von Gegenkathete von α zu Hypotenuse

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c} \qquad \text{analog } \sin\beta = \frac{b}{c}$$

Als **Kosinus von α** bezeichnet man das Verhältnis von Ankathete von α zu Hypotenuse

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c} \qquad \text{analog } \cos\beta = \frac{a}{c}$$

Als **Tangens von α** bezeichnet man das Verhältnis von Gegenkathete von α zu Ankathete von α

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b} \qquad \text{analog } \tan\beta = \frac{b}{a}$$

Beispiel:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Kathete a = 1 dm und der Hypotenuse c = 2 dm.. Dann beträgt nach dem Satz des Pythagoras die Länge der zweiten Kathete b= $\sqrt{3}$ dm.

Es gilt dann:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Werte spezieller Winkel:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht definiert

Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken

Alle Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks lassen sich berechnen, wenn

a) zwei Seiten gegeben sind,

oder

b) eine Seite und außerdem rechten Winkel ein weiterer Winkel gegeben ist.

Sei a = 4 cm eine Kathete und c = 5 cm die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ABC, dann ist:

$$\sin\frac{a}{c}=\frac{4}{5}\Rightarrow\alpha\approx 53°$$

$$\cos\frac{a}{c}=\frac{4}{5}\Rightarrow\beta\approx 37°$$

$$\gamma=90°$$

$$\sin\beta=\frac{b}{c}\Rightarrow b=\sin\beta\cdot c=\frac{3}{5}\cdot 5cm=3cm$$

Sei $\gamma = 90°$, $\alpha = 60°$ und b = 5 cm (Kathete, wegen $\gamma = 90°$) in einem rechtwinkligen Dreieck ABC, dann ist:

$\beta=30°$ (Innenwinkelsumme)

$a=b\cdot\tan\alpha=5\sqrt{3}$, da $\tan\alpha=\frac{a}{b}$

$c=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{5}{0{,}5}=10$, da $\sin\beta=\frac{b}{c}$

Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

Für alle Winkel α mit $0°\leq\alpha\leq 90°$ gilt:

a) $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ und $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$

b) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

c) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ Beachte $(\alpha\neq 90°)$,

da $\cos\ 90°=0$

Sei ΔABC bei B rechtwinklig, d.h. $\beta = 90°$, dann gilt:

$$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)=\cos\gamma$$

$$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)=\sin\gamma$$

Sei nun $\alpha = 30°$, dann ist:

$$\sin^2 30°+\cos^2 30° =\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 =\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

$$\tan 30°=\frac{\sin 30°}{\cos 30°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Anwendung:

Vereinfache den Term $\tan\alpha\cdot\cos\alpha$

Lösung: $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$