Die Quadratische Funktion und Gleichung

Es gibt drei Grundformen des Funktionsterms einer Quadratischen Funktion

(1) Normalform: $f(x) = ax^2 + bx + c$

(2) Scheitelform: $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$

(3) Nullstellenform: $f(x) = a(x - x_{01})(x - x_{02})$

mit $a \neq 0$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ $D_f =$

$f(x) = (x+1)^2 - 4$

$f(x) = (x+4)(x-1)$

Die Scheitelform $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$

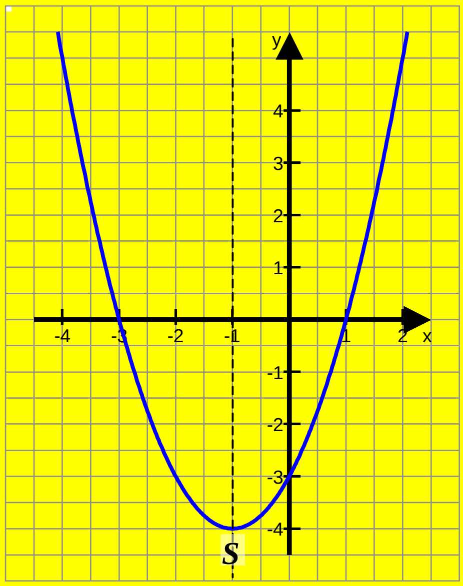
Für die Darstellung einer quadratischen Funktion im Funktionsgraph ist die Scheitelform ein entscheidendes Instrument.

Der Graph ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(x_S; y_S)$. Die Parabel ist achsensymmetrisch.

Die Symmetrieachse läuft durch den Scheitel und ist parallel zur y-Achse.

$f(x) = (x+1)^2 - 4 = [x - (-1)] - 4$

$S(-1/-4)$



Der Öffnungsfaktor *a*

a taucht in allen drei Grundformen des Funktionsterms auf und ist verantwortlich für die Öffnungsrichtung und die Öffnungsweite der Parabel. Es gilt:

1. $a \neq 0$ sonst ist die Funktion keine Quadratische
2. für die Öffnungsrichtung:

   ***a* < 0** → Parabel ist nach **unten** geöffnet

   ***a* > 0** → Parabel ist nach **oben** geöffnet
3. für die Öffnungsweite

   |*a*| = 1 Öffnungsweite wie **Normal**parabel

   |*a*| < 1 Parabel ist **weit**er als die Normalparabel geöffnet.

   |a| > 1 Parabel ist **schmal**er als die Normalparabel geöffnet.

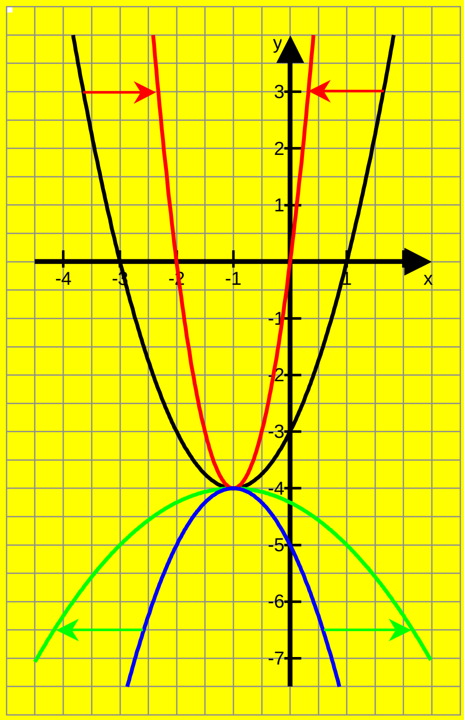
$f_a(x) = a(x+1)^2 - 4$

***a* = 1**
→ **Normal**parabel
nach **oben** geöffnet

***a* = -1**
→ **Normal**parabel
nach **unten** geöffnet

***a* = 4**
→ **schmale** Parabel
nach **oben** geöffnet

***a* = -0,25**
→ **weite** Parabel
nach **unten** geöffnet



Wertebereich der Funktion

Mit Hilfe des Öffnungsfaktors a und der y-Koordinate des Scheitel kann der Wertebereich bestimmt werden.

$f(x) = 4(x+1)^2 - 4$
$a = 4$ (nach oben); $y_S = -4$
$\rightarrow W_f = [-4 ; +\infty [$

$f(x) = -(x+1)^2 - 4$
$a = -1$ (nach unten); $y_S = -4$
$\rightarrow W_f =]-\infty ; -4]$

Von der Normalform zur Scheitelform

In den meisten Fällen ist der Funktionsterm in der Normalform gegeben und muss daher erst mit Hilfe der **Quadratischen Ergänzung** in die Scheitelform umgewandelt werden.

$f(x) = 2x^2 + 4x - 2$ **Normalform**

1. Öffnungsfaktor a ausklammern

   $f(x) = 2(x^2 + 2x - 1)$

2. Quadratische Ergänzung

   d.h. der Term wird so erweitert, dass die Summenform der 1. oder 2. binomischen Formel entsteht. Dazu wird der Koeffizient vor dem x (Linearglied) halbiert und anschließend quadriert einmal dazuaddiert und wieder subtrahiert, damit der Wert des Terms gleich bleibt.

   $f(x) = 2(x^2 + 2x \; +1 - 1 \; -1)$

   $f(x) = 2[(x^2 + 2x + 1) \; - 2]$

   $f(x) = 2[(x+1)^2 - 2]$

3. Öffnungsfaktor wieder hinein multiplizieren

   $f(x) = 2(x+1)^2 - 4 \quad \rightarrow S(-1 / -4)$ **Scheitelform**

Die Nullstellen der Quadratischen Funktion

Neben dem Scheitel sind die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse von wesentlicher Bedeutung. Die x-Koordinaten dieser Punkte nennt man Nullstellen.

Dazu muss man die **quadratische Gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ **lösen**.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ („Mitternachtsformel“)

$f(x) = x^2 + 2x - 3$
$x^2 + 2x - 3 = 0$
mit $a = 1$; $b = 2$; $c = -3$

$f(x) = -0{,}25x^2 - 0{,}5x - 4{,}25$
$-0{,}25x^2 - 0{,}5x - 4{,}25 = 0$
a = -0,25; b = -0,5; c = -4,25

Folgende Fälle können eintreten:

Entscheidend dafür ist die <u>**Diskriminante**</u>

$D=b^2-4ac$

(1) Ist $D < 0$ gibt es keine Lösung, d.h. der Graph hat keine Nullstellen

$D = -4 < 0 \rightarrow$ keine Nullstelle

(2) Ist $D = 0$ gibt es eine Lösung, d.h. der Graph hat eine Nullstelle $\rightarrow x_S$ (*x-Koordinate* des Scheitels)

(3) Ist $D > 0$ gibt es zwei Lösungen, d.h. der Graph hat zwei Nullstellen:

$D = 16 > 0 \rightarrow$ 2 Nullstellen

$\rightarrow x_{01} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -3$ und $x_{02} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 1$

Die Lösungsmenge jeder quadratischen Gleichung kann bestimmt werden, wenn sie zuvor in die Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ **gebracht wird.** (Lösungsweg siehe oben)

Die Nullstellenform

Mit Hilfe der Nullstellen kann nun die Nullstellenform des Funktionsterms aufgestellt werden.

$$f(x) = a(x - x_{01})(x - x_{02})$$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$a = 1$, $x_{01} = -3$ und $x_{02} = 1$

$\rightarrow \; f(x) = (x+3)(x-1)$

Faktorisierung (Zerlegung in Linearfaktoren)

Die Nullstellenform entspricht der vollständigen Zerlegung des Funktionsterms in Linearfaktoren, d.h. in jedem Faktor des Terms kommt x höchstens in der ersten Potenz (also linear) vor.

$f(x) = -0{,}25x^2 - 0{,}5x - 4{,}25$ kann nicht faktorisiert werden, da für die Gleichung $0 = -0{,}25x^2 - 0{,}5x - 4{,}25$ keine Lösung existiert.

Aufstellen des Funktionsterms

(1) Scheitel und ein weiterer Punkt gegeben

In die Scheitelform werden für x_S und y_S die Scheitelkoordinaten und für x und y die Koordinaten des Punktes eingesetzt.

→ nach a auflösen und anschießend Funktionsterm aufstellen.

S(-1 / -4) und P(4 / -10,25)

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S$$

$$-10{,}25 = a(4+1)^2 - 4$$

$\rightarrow \quad a = -0{,}25$

$\rightarrow \quad f(x) = -0{,}25(x+1)^2 - 4$

(2) Nullstellen und ein weiterer Punkt gegeben

In die Nullstellenform werden die Nullstellen und die Koordinaten des Punktes eingesetzt.

→ nach a auflösen und anschießend Funktionsterm aufstellen.

$x_{01} = -2$; $x_{02} = 0$ und P(-1,5 / -3)

$$y = a(x - x_{01})(x - x_{02})$$

$$-3 = a(-1{,}5 + 2)(-1{,}5 - 0)$$

$\rightarrow \quad a = 4$

$\rightarrow \quad f(x) = 4(x+2)(x-0) = 4x(x+2)$

(3) Drei beliebige Punkte gegeben

Man setzt die Koordinaten der Punkte jeweils in die Normalform ein. So entsteht ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten (a, b, c). Dieses löst man mit einer Kombination aus Einsetzungs- und Additionsverfahren.

1.) Gleichungen aufstellen
2.) Eine Gleichung nach c umstellen und in die beiden anderen einsetzen
3.) Das entstandene lineare Gleichungssystem (2 Gleichungen, 2 Unbekannte (a, b)) mit dem Additionsverfahren lösen

P_1(-2 / -5) ; P_2(1 / -8) ; P_3(2 / -13)

$$y = ax^2 + bx + c$$

$P_1 \rightarrow \quad -5 = a(-2)^2 + b(-2) + c = 4a - 2b + c$ (I)

$P_2 \rightarrow \quad -8 = a + b + c$ (II)

$P_3 \rightarrow \quad -13 = 4a + 2b + c$ (III)

Aus (II) folgt: $c = -a - b - 8$ → einsetzen in (I) und (III)

(Ia) $\quad 3 = 3a - 3b$

(IIIa) $\quad -5 = 3a + b$

(Ia)-(IIIa) $\quad 8 = 0 - 4b \quad \rightarrow b = -2$

Durch einsetzen in (Ia) und (II) erhält man

$a = -1$ und $c = -5$

$\rightarrow \quad f(x) = -x^2 - 2x - 5$